

Prof. Dr. Alfred Toth

Kleine Peirce-Zahlen-Arithmetik

1. Bereits in Toth (2009) wurde darauf hingewiesen, dass wir innerhalb von Zeichenklassen und ihre dualen Realitätsthematiken zwei verschiedene Arten von Ordnungstypen innerhalb der von Bense so genannten Primzeichen (Bense 1980) oder der von mir sogenannten Peirce-Zahlen antreffen. Wenn man sich vergegenwärtigt, dass die triadische Peircesche Zeichenrelation das folgende Ordnungsschema aufweist (vgl. Bense 1979, S. 67):

$ZR(td.) = ((M) \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I))),$ d.h.

$ZR(td.) = (1 \rightarrow (2 \rightarrow 3)),$

während die trichotomische Zeichenrelation einer allgemeinen Zeichenklassen

$Zkl = (3.a \ 2.b \ 1.c)$

die Ordnung $(a \leq b \leq c)$ aufweist, so steht also die irreflexive und asymmetrische Ordnung der triadischen Peirce-Zeichen der reflexive und symmetrischen Ordnung der trichotomischen Peirce-Zeichen gegenüber:

$td\mathbb{P} = (<, \mathbb{N})$

$tt\mathbb{P} = (\leq, \mathbb{N}).$

2. Dennoch fallen aber beiden „Ordnungstypen“ (Hausdorff) der Peirce-Zeichen insofern aus dem Rahmen, als die üblichen arithmetischen Operationen über \mathbb{N}

$1 + 1 = 2$

$1 + 2 = 3 = 2 + 1,$ usw.

semiotisch sinnlos sind, da man nicht einfach zwei Mittelbezüge addieren kann, um etwas ganz anderes, d.h. einen Objektbezug zu erhalten, oder einen Objekt- und einen Mittelbezug addieren kann, um einen Interpretantenbezug zu bekommen.

Dennoch wissen wir im Anschluss an Beckmann, Berger, Walther (1979, S. 135 ff.) und Toth (2008), dass die zehn Peirceschen Zeichenklassen einen Verband definieren und dass daher die folgenden verbandstheoretischen (booleschen) Operationen funktionieren:

$$1 \sqcap 1 = 1$$

$$1 \sqcap 2 = 1 = 2 \sqcap 1$$

$$1 \sqcap 3 = 1 = 3 \sqcap 1$$

$$1 \sqcup 1 = 1$$

$$1 \sqcup 2 = 2 = 2 \sqcup 1$$

$$1 \sqcup 3 = 3 = 3 \sqcup 1$$

Damit kann man natürlich auch die beiden Peirce-Zahlen wie folgt notieren:

$$\text{Td}\mathbb{P} = (1 \sqsubset 2 \sqsubset 3) \text{ bzw. } \times(\text{Td}\mathbb{P}) = (3 \supset 2 \supset 1)$$

$$\text{Tt}\mathbb{P} = (1 \sqsupseteq 2 \sqsupseteq 3) \text{ bzw. } \times(\text{Tt}\mathbb{P}) = (3 \supseteq 2 \supseteq 1)$$

3. Trotzdem ist es mit Hilfe der für Peirce-Zahlen gültigen Operationen unmöglich, von einer Erstheit zu einer Zweitheit oder Drittheit oder von einer Zweitheit zu einer Drittheit (und jeweils umgekehrt) zu gelangen. Bense hatte sich schon sehr früh damit beholfen, dass er – wohl in Voraussicht auf die Unterscheidung von zwei Ordnungstypen der Peirce-Zeichen – zwischen „koordinativen“ und „selektiven“ generativ-semiosischen sowie degenerativ-retrosemiosischen Operationen unterschieden hatte (vgl. Toth 2008, S. 13). Koordination ist also jene Operation, welche die Sukzession $\sigma(n) = n + 1$ für jede triadische Peirce-Zahl n , beginnend mit $n = 1$ liefert. Da das Nullzeichen original aber nicht definiert ist in der triadischen Peirceschen Zeichenrelation, kann 1 selbst nicht hergestellt, sondern muss „thetisch eingeführt“ werden, d.h. es muss eine gesonderte Operation angenommen werden (vgl. Toth 2008, S. 15). Da für die Koordinationsoperation seit Bense das Zeichen \mapsto verwendet wird, haben wir also

$$\text{ZR} = 1. \mapsto 2. \mapsto 3., \text{ bzw.}$$

$$\text{td}\mathbb{P} = (\mapsto, \mathbb{N})$$

Für die Selektionsoperation verwendet Bense das leider irreleitende Zeichen $>$, das, wie oben gezeigt, dasselbe wie \leq bedeutet:

$$\text{ZR} = .1 > .2 > .3$$

$$\text{td}\mathbb{P} = (>, \mathbb{N}).$$

Die Unterscheidung zwischen „Koordination“ und „Selektion“ (auch wenn diese Begriffe mathematisch nichtssagend sind) ist wichtig, um es nochmals hervorzuheben, denn die lineare Progression der der Triaden ist ja wie folgt

$$\text{td}\mathbb{P} = 1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto \dots$$

während diejenige der Trichotomien wie folgt ist

$$\begin{array}{l} \text{tt}\mathbb{P} = \\ \quad 1 > 1 / 1 > 2 / 1 > 3 \\ \quad 2 > 2 / 2 > 3 \\ \quad 3 > 3 \end{array}$$

Man würde also besser z.B. die Zeichen \uparrow und $|\uparrow$ wählen, um mit ersterer die Progression der $\text{td}\mathbb{P}$ und mit letzterer diejenige der $\text{tt}\mathbb{P}$ zu bezeichnen:

$$\text{ZR} = 1. \uparrow 2. \uparrow 3., \text{ bzw.}$$

$$\text{td}\mathbb{P} = (\uparrow, \mathbb{N})$$

$$\text{ZR} = 1. |\uparrow 2. |\uparrow 3., \text{ bzw.}$$

$$\text{tt}\mathbb{P} = (|\uparrow, \mathbb{N})$$

Wenn Bense also, wie er dies an mehreren Stellen tat, z.B. in (1979, S. 45; 1981, S. 39) das Nachfolger-Ordnungsprinzip der Peanozahlen

$$1, 2, 3, \dots$$

$$1, 11, 111, \dots$$

mit denjenigen der Primzeichen (1975, S. 167 ff.) gleichsetzte (vgl. auch 1983, S. 192 ff.), dann ist das 1. falsch – denn es gibt ja – wie oben gezeigt, keine Operation, um durch Addition von Monaden Dyaden oder von Monaden und Dyaden Triaden zu erzeugen, und 2. vergisst Bense zu sagen und zu

begründen, dass die von ihm eher provisorisch eingeführten Operationen Koordination und Selektion im Gegensatz zu den rein quantitativen verbandstheoretischen Operationen QUALITATIV sind. D.h. (polykontextural-) arithmetische Operationen wie

$$\begin{array}{ll} M + M = ? & 1 + 1 = ? \\ O + O = ? & 2 + 2 = ? \\ I + I = ? & 3 + 3 = ? \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} M + M + M = ? & 1 + 1 + 1 = ? \\ M + O = ? & 1 + 2 = ? \\ O + I = ? & 2 + 3 = ? \end{array}$$

involvieren jenen „qualitativen Sprung“, von dem Kierkegaard gesprochen hatte: “Die Sünde kommt also hinein als das Plötzliche, d.h. durch einen Sprung; aber dieser Sprung setzt zugleich die Qualität; doch indem die Qualität gesetzt ist, ist im selben Augenblick der Sprung in die Qualität hineinverflochten und von der Qualität vorausgesetzt und die Qualität vom Sprunge” (1984, S. 32). Kurz gesagt: Die Semiotik besteht aus zwei Zahlensorten:

$$\text{td}\mathbb{P} \subset \mathbb{N} \text{ und } \text{td}\mathbb{P} \subset \mathbb{N},$$

aus den quantitativen booleschen Operatoren

$$\sqcap, \sqcup, \sqsubset, \sqsupset, =,$$

sowie aus den qualitativen Operatoren

$$\uparrow, |\uparrow$$

und ist damit einmal mehr als ein quantitativ-qualitatives Teilgebiet der Mathematik nachgewiesen.

Bibliographie

- Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975
 Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979
 Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: Ars Semeiotica III/3, 1980, S. 287-294
 Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983
Kierkegaard, Søren, Der Begriff Angst. Frankfurt am Main 1984
Toth, Alfred, Entwurf einer allgemeinen Zeichengrammatik. Klagenfurt 2008
Toth, Alfred, Semiotische Limeszahlen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics (erscheint, 2009)
Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

2.11.2009